第 38 講　総合問題(6)

1 (1) 方程式 $2x^3-3x^2+1=a$（a は実数）が相異なる３つの実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとき，α，β，γ のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

(2) (1)のとき，$l=\gamma-\alpha$　を β のみを用いて表せ．また，l の動く範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える．曲線 $C: y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ．

(2)　(1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする（ただし　$p<q$）．このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ．

(3)　$t \geqq 0$ のとき，2 点 P，Q の間の距離の最小値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$f(x)=2x^3+12x^2+18x+9$ とおくとき，関数 $y=f(x)$ のグラフは点 A に関して点対称である．点 A を通る傾き m の直線を l とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 A の座標を求めよ．

(2)　直線 l が関数 $y=f(x)$ のグラフと 3 点で交わる条件を求めよ．

(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 l で囲まれた 2 つの部分の面積の和が 1 となるような m の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第38講　総合問題(6)

x の3次方程式 $x^3-3x-a=0$ 　の3解を α, β, γ $(\alpha \leqq \beta \leqq \gamma)$ とする．定数 a を $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲で動かすとき，次の問いに答えよ．

(1)　α, β, γ のとりうる値の範囲は

$-\sqrt{\boxed{\text{ア}}} \leqq \alpha \leqq -\boxed{\text{イ}}$,　$-\boxed{\text{ウ}} \leqq \beta \leqq \boxed{\text{エ}}$,　$\sqrt{\boxed{\text{オ}}} \leqq \gamma \leqq \boxed{\text{カ}}$

である．

(2)　$\alpha+\beta$ の最大値は　$-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第38講　総合問題(6)

1 (1)　方程式 $2x^3-3x^2+1=a$ (a は実数) が相異なる3つの実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ($\alpha<\beta<\gamma$) をもつとき，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

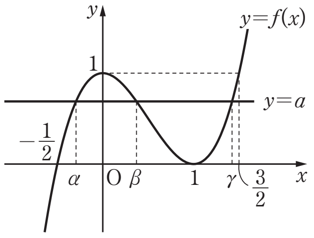
(2)　(1)のとき，$l=\gamma-\alpha$　を β のみを用いて表せ．また，l の動く範囲を求めよ．

(1)　$f(x)=2x^3-3x^2+1$　とおくと，$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

極大値　$f(0)=1$　　極小値　$f(1)=0$

また $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$　であり，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=1$　より

$y=f(x)$ のグラフは右図．



これと直線 $y=a$ が3交点をもつとき，

その x 座標が $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ($\alpha<\beta<\gamma$)

したがって求める範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}<\alpha<0,\ 0<\beta<1,\ 1<\gamma<\dfrac{3}{2}}$

(2)　$f(x)=a$　つまり　$2x^3-3x^2+1-a=0$　の3つの実数解が $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ より

解と係数の関係から　$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3}{2}$　　よって　$\gamma+\alpha=\dfrac{3}{2}-\beta$　……①

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$　よって　$\gamma\alpha=-\alpha\beta-\beta\gamma$

①より　$\gamma\alpha=-\beta\left(\dfrac{3}{2}-\beta\right)=\beta^2-\dfrac{3}{2}\beta$　……②

①，②より　$l^2=(\gamma-\alpha)^2=(\gamma+\alpha)^2-4\gamma\alpha$

$$=\left(\frac{3}{2}-\beta\right)^2-4\left(\beta^2-\frac{3}{2}\beta\right)=-3\beta^2+3\beta+\frac{9}{4}=\frac{-12\beta^2+12\beta+9}{4}$$

したがって　$\boldsymbol{l=\dfrac{\sqrt{-12\beta^2+12\beta+9}}{2}}$

$g(\beta)=-12\beta^2+12\beta+9=-12\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)^2+12$　とおくと

(1)より　$0<\beta<1$　　よって　$9<g(\beta)\leqq 12$　　ゆえに　$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}<l\leqq\sqrt{3}}$

2　関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$　を考える．曲線 $C：y=f(x)$　について，以下の問いに答えよ．

(1)　$t\geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を2本もつことを示せ．

(2)　(1)において，傾きが t である2本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする（ただし　$p<q$）．このとき，点Pと点Qは点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ．

(3)　$t\geqq 0$ のとき，2点P，Qの間の距離の最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

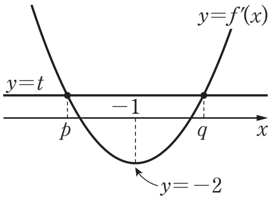
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(1)　$f(x)=x^3+3x^2+x-1$　より　$f'(x)=3x^2+6x+1=3(x+1)^2-2$

$t\geqq 0$　のとき $f'(x)=t$　を満たす異なる2実数解があることが

$y=f'(x)$ と $y=t$ のグラフよりわかる.

したがって　C は傾きが t である接線を2本もつ.



(2)　$p,\ q$ は $f'(x)=t$　つまり　$3x^2+6x+1-t=0$　の2解より

$p+q=-2$　　よって　$\dfrac{p+q}{2}=-1$

また $f(x)=f'(x)\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}$　より

$f(p)+f(q)=f'(p)\left(\dfrac{1}{3}p+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{4}{3}p-\dfrac{4}{3}+f'(q)\left(\dfrac{1}{3}q+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{4}{3}q-\dfrac{4}{3}$

ここで $f'(p)=f'(q)=t$ より

$$f(p)+f(q)=t\left(\dfrac{1}{3}p+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{4}{3}p-\dfrac{4}{3}+t\left(\dfrac{1}{3}q+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{4}{3}q-\dfrac{4}{3}$$

$$=t\left\{\dfrac{1}{3}(p+q)+\dfrac{2}{3}\right\}-\dfrac{4}{3}(p+q)-\dfrac{8}{3}$$

$p+q=-2$ より

$f(p)+f(q)=t\left\{\dfrac{1}{3}\cdot(-2)+\dfrac{2}{3}\right\}-\dfrac{4}{3}\cdot(-2)-\dfrac{8}{3}=0$　　よって　$\dfrac{f(p)+f(q)}{2}=0$

したがって　P，Q の中点が A$(-1,\ 0)$ より，2点 P，Q は A に関して対称である.

(3)　(2)より PQ＝2AQ　よって AQ の距離の最小値を求める.

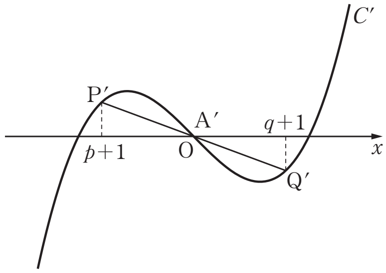
C を x 軸方向に1平行移動したグラフの式は

C'：$y=(x-1)^3+3(x-1)^2+(x-1)-1=x^3-2x$

右図より

$\mathrm{AQ}^2=(\mathrm{A'Q'})^2=(q+1)^2+\{(q+1)^3-2(q+1)\}^2$

$\quad=(q+1)^6-4(q+1)^4+5(q+1)^2$



$(q+1)^2=X$　とおくと $\mathrm{AQ}^2=X^3-4X^2+5X$

$g(X)=X^3-4X^2+5X$ とおくと

$g'(X)=3X^2-8X+5=(3X-5)(X-1)$

また(1)より　$f'(x)=0$　を満たす x について　$(x+1)^2=\dfrac{2}{3}$

よって　$t\geqq 0$　のとき $X=(q+1)^2\geqq\dfrac{2}{3}$

したがって　PQ の最小値は　$2\sqrt{\dfrac{50}{27}}=\mathbf{\dfrac{10\sqrt{6}}{9}}$

X	$\frac{2}{3}$	…	1	…	$\frac{5}{3}$	…
$g'(X)$		＋	0	−	0	＋
$g(X)$	$\frac{50}{27}$	↗		↘	$\frac{50}{27}$	↗

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$f(x)=2x^3+12x^2+18x+9$ とおくとき，関数 $y=f(x)$ のグラフは点Aに関して点対称である．点Aを通る傾き m の直線を l とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点Aの座標を求めよ．

(2)　直線 l が関数 $y=f(x)$ のグラフと3点で交わる条件を求めよ．

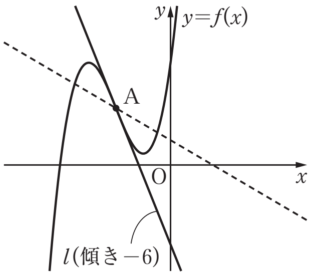
(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 l で囲まれた2つの部分の面積の和が1となるような m の値を求めよ．

(1)　$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に2，y 軸方向に -5 平行移動したグラフの式を $y=g(x)$ とすると

$$g(x)=f(x-2)-5=2(x-2)^3+12(x-2)^2+18(x-2)+9-5=2x^3-6x$$

これは奇関数よりグラフは原点対称．

よって　$y=f(x)$ のグラフは　**A(−2, 5)** に関して点対称である．



(2)　$f'(x)=6x^2+24x+18$　$f'(-2)=-6$

よって　$y=f(x)$ のグラフの対称点Aを通る直線 l が $y=f(x)$ のグラフと3点で交わるのは　$\boldsymbol{m>-6}$　のとき

(3)　題意の面積は　$y=g(x)$ のグラフと原点を通る傾き m の直線　$y=mx$　で囲まれた部分の面積である．

$g(x)=mx$　つまり　$2x^3-(m+6)x=0$

$$x\{2x^2-(m+6)\}=0 \qquad x=0,\ \pm\sqrt{\frac{m+6}{2}} \quad (m>-6)$$

$\alpha=\sqrt{\dfrac{m+6}{2}}$　とおくと，交点の x 座標は　$x=-\alpha,\ 0,\ \alpha$

グラフの対称性より

$$\int_0^\alpha \{mx-(2x^3-6x)\}dx=\frac{1}{2} \qquad \left[-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}(m+6)x^2\right]_0^\alpha=\frac{1}{2}$$

$(m+6)\alpha^2-\alpha^4=1$　　つまり　$\dfrac{(m+6)^2}{2}-\dfrac{(m+6)^2}{4}=1$　　$(m+6)^2=4$

$m+6=2$　(>0)　　ゆえに　$\boldsymbol{m=-4}$

第38講　総合問題(6)

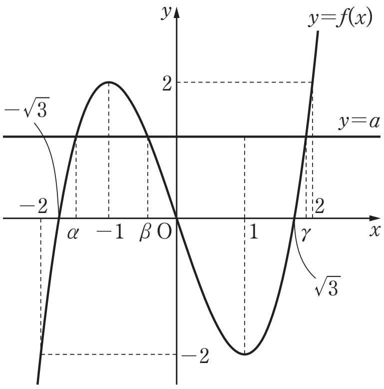
x の3次方程式 $x^3-3x-a=0$　の3解を α，β，γ（$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$）とする．定数 a を $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲で動かすとき，次の問いに答えよ．

(1)　α，β，γ のとりうる値の範囲は

$-\sqrt{\boxed{\text{ア}}} \leqq \alpha \leqq -\boxed{\text{イ}}$，　$-\boxed{\text{ウ}} \leqq \beta \leqq \boxed{\text{エ}}$，　$\sqrt{\boxed{\text{オ}}} \leqq \gamma \leqq \boxed{\text{カ}}$

である．

(2)　$\alpha+\beta$ の最大値は　$-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$　である．



(1)　$x^3-3x-a=0$　……①　より　$x^3-3x=a$

よって①の3解 α，β，γ（$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$）は

$f(x)=x^3-3x$　と　$y=a$ の共有点の x 座標である．

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(-1)=2$，$f(1)=-2$

また，$f(2)=2$，$f(-2)=-2$

よって　$y=f(x)$ のグラフは右図．

$0 \leqq a \leqq 2$ を考慮して，

$\boldsymbol{-\sqrt{3} \leqq \alpha \leqq -1}$，　$\boldsymbol{-1 \leqq \beta \leqq 0}$，　$\boldsymbol{\sqrt{3} \leqq \gamma \leqq 2}$

(2)　①の3解が α，β，γ であることより，解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma=0$　　つまり　$\alpha+\beta=-\gamma$

よって　$\alpha+\beta$ が最大となるのは，γ が最小となるとき．

(1)より　γ は $a=0$　のとき　最小値　$\sqrt{3}$　をとる．

このとき　$\alpha+\beta$ は最大値　$\boldsymbol{-\sqrt{3}}$　をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。